УДК 519.633
DOI 10.21685/2072-3040-2020-3-6

И. В. Бойков, В. А. Рязанцев

ЧИСЛЕННОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ НАЧАЛЬНОГО УСЛОВИЯ В ЗАДАЧАХ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация.

Актуальность и цели. Теория решения обратных задач математической физики является одним из наиболее активно развивающихся разделов современной математики. Интерес исследователей к таким задачам обусловлен в первую очередь большим количеством их приложений, появившихся в последние годы в связи с бурным развитием физики и техники. Несмотря на большое количество методов решения обратных задач, в настоящее время по-прежнему велика потребность в дальнейшей разработке новых методов решения, учитывающих некорректность ряда обратных задач. В данной работе предлагаются численные методы решения одного класса обратных задач, а именно задач восстановления начальных условий для уравнений параболического и гиперболического типов.

Материалы и методы. Методика построения численных методов решения задач восстановления начальных условий для линейных параболических и гиперболических уравнений заключается в следующем. По известным формулам обобщенного решения линейных параболических и гиперболических уравнений выполняется переход к эквивалентным исходным задачам линейным интегральным уравнениям первого рода, которые затем решаются приближенно при помощи непрерывного операторного метода. Для этого составляется и решается вспомогательная система линейных дифференциальных уравнений, которая затем решается численным методом Эйлера. При этом на численных примерах показывается, что за счет подходящего числа шагов метода Эйлера может быть достигнута (в случае необходимости) регуляризация решения задачи. Сходимость метода обосновывается в терминах теории устойчивости решения дифференциальных уравнений.

Результаты. Построены численные методы приближенного решения задачи о восстановлении начального условия для линейных параболических и гиперболических уравнений. Авторам удалось успешно применить непрерывный операторный метод к решению вышеупомянутой задачи. Решение ряда модельных примеров показало эффективность предложенных результатов.

Выводы. Предложены эффективные численные методы решения одного класса обратных задач математической физики, а именно задачи восстановления начального условия в задачах Коши для линейных уравнений гиперболического и параболического типов. На численных примерах показано, что непрерывный операторный метод с успехом может быть применен к решению указанных типов обратных задач математической физики.

Ключевые слова: параболические уравнения, гиперболические уравнения, обратные задачи, начальное условие, регуляризация.

I. V. Boykov, V. A. Ryazantsev

NUMERICAL RECOVERY OF THE INITIAL CONDITION IN THE CAUCHY PROBLEMS FOR LINEAR PARABOLIC AND HYPERBOLIC EQUATIONS

Abstract.

Background. The theory of solving inverse problems of mathematical physics is one of the most actively developing branches of modern mathematics. The interest of researchers in such problems is primarily due to the large number of their applications that have appeared in recent years in connection with the rapid development of physics and technology. Despite the large number of methods for solving inverse problems, at present, there is still a great need for the further development of new methods of solving that take into account the incorrectness of a number of inverse problems. In this paper, we propose numerical methods for solving one class of inverse problems, namely, problems of recovering the initial conditions for equations of parabolic and hyperbolic types.

Materials and methods. The technique for constructing numerical methods for solving problems of recovering initial conditions for linear parabolic and hyperbolic equations is as follows. According to the well-known formulas for the generalized solution of linear parabolic and hyperbolic equations, a transition is made to the equivalent initial problems of linear integral equations of the first kind, which are then solved approximately using the continuous operator method. For this, an auxiliary system of linear differential equations is compiled and solved, which is then solved by the numerical Euler method. At the same time, numerical examples show that due to a suitable number of steps of the Euler method, a regularization of the solution of the problem can be achieved (if necessary). The convergence of the method is substantiated in terms of the stability theory of the solution of differential equations.

Results. Numerical methods are developed for the approximate solution of the problem of recovering the initial condition for linear parabolic and hyperbolic equations. The authors have successfully applied the continuous operator method to the solution of the above problem. The solution of a number of model examples showed the effectiveness of the proposed results.

Conclusions. Effective numerical methods are proposed for solving one class of inverse problems of mathematical physics, namely, the problem of recovering the initial condition in Cauchy problems for linear equations of hyperbolic and parabolic types. Numerical examples show that the continuous operator method can be successfully applied to the solution of the indicated types of inverse problems of mathematical physics.

Keywords: parabolic equations, hyperbolic equations, inverse problems, initial condition, regularization.

Введение

История решения обратных задач математической физики насчитывает уже более века. Исследования в этом направлении особенно активизировались с появлением и развитием современной вычислительной техники, значительно расширившей спектр применяемых к решению таких задач вычислительных алгоритмов. В настоящее время число приложений обратных задач математической физики продолжает увеличиваться, благодаря чему разработка эффективных численных методов решения таких задач становится все более и более актуальной.

В данной статье рассматривается один класс обратных задач математической физики, известных как ретроспективные обратные задачи. Их суть заключается в восстановлении одного или нескольких начальных условий задачи по известным значениям решения в некоторый момент времени.

Задача с обратным временем для параболических уравнений имеет большое число приложений, в числе которых, например, исследование процессов теплообмена, а также решение различных задач идентификации. Список работ, в которых изучались свойства этой задачи и строились численные методы, весьма обширен; среди них следует в первую очередь назвать монографии [1–9], в которых содержится обширная библиография. Среди всего многообразия методов, используемых для решения ретроспективной обратной задачи, особое место занимают итерационные методы, в том числе градиентные методы. Отметим здесь, например, книгу [9], а также статью [10], в которой, помимо краткого обзора результатов в области решения ретроспективных обратных задач для уравнения теплопроводности, упомянуто, что при использовании итерационных методов в качестве параметра регуляризации может рассматриваться число итераций, согласуемое с погрешностью входных данных. Отметим также, что в целом ряде работ (см., напр., [11–14]) подчеркивается важность и эффективность итерационных (в частности градиентных) методов решения задачи восстановления начального условия для уравнений гиперболического типа.

Настоящая статья посвящена построению численных методов решения следующих проблем.

1. Проблема восстановления начального условия в задаче Коши для линейного параболического дифференциального уравнения.

Рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\gamma\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\Phi(t,x),\ 0\leqslant t\leqslant T,\ x\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

$$u(0,x)=\varphi(x). \tag{2}$$

Требуется восстановить неизвестную функцию $\varphi(x)$, если, помимо константы $\gamma>0$ и функции $\Phi(t,x)$, дополнительно известной является функция $u(T,x)$.

2. Проблема восстановления начального условия в задаче Коши для линейного гиперболического уравнения.

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\Phi(t,x),\ 0\leqslant t\leqslant T,\ x\in\mathbb{R}, \tag{3}$$

$$u(0,x)=\varphi(x), \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x). \tag{5}$$

Решаются следующие задачи:

– требуется восстановить неизвестную функцию $\varphi(x)$ в предположении о том, что, помимо константы a и функций $\psi(x)$ и $\Phi(t,x)$, дополнительно известной является функция $u(T,x)$;

– требуется восстановить неизвестную функцию $\psi(x)$ в предположении о том, что, помимо константы a и функций $\varphi(x)$ и $\Phi(t,x)$, дополнительно известной является функция $u(T,x)$.

Перечисленные задачи успешно решены в рамках данной работы. При построении численных методов широко использовался непрерывный операторный метод, ранее предложенный в статье [15]. Решение модельных примеров продемонстрировало эффективность предложенных методов.

Данная статья продолжает цикл статей [16–19], посвященных применению непрерывного операторного метода к решению различных задач математической физики.

1. Восстановление начального условия для параболического уравнения

Построим численный метод восстановления функции $\varphi(x)$ в задаче (1)–(2) в предположении о том, что известной является функция $u(T,x)$.

Известно [20], что точное решение задачи Коши (1)–(2) дается следующей интегральной формулой:

$$u(t,x)=\int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi+\int_{0}^{t}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi,\eta)G(x,\xi,t-s)d\xi ds, \tag{6}$$

где $G(x,\xi,t)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi\gamma t}}\exp\left[-\dfrac{(x-\xi)^2}{4\gamma t}\right]$.

Предположим, что функция $\varphi(x)$ принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R})$ функций, суммируемых в квадрате на вещественной оси.

Обозначим $x_j=-A+jh$, где $j=\overline{0,N}$, $h=2A/N$, A – достаточно большое вещественное положительное число; N – достаточно большое целое положительное число. Пусть также $u\left(T,x_j\right)=\chi_j$. Примем в уравнении (6) $t=T$ и $x=x_j$, в результате чего получим:

$$\chi_j=\int_{-\infty}^{\infty} G\left(x_j,\xi,T\right)\varphi(\xi)d\xi+\int_{0}^{T}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi,\eta)G(x,\xi,T-s)d\xi ds. \tag{7}$$

Обозначим как f_j аппроксимацию интеграла

$$\int_{0}^{T}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi,\eta)G(x,\xi,T-s)d\xi ds$$

при помощи одной из кубатурных формул. Пусть $\varphi_j = \varphi(x_j)$. Аппроксимируем первый интеграл в правой части уравнения (7) при помощи квадратурной формулы трапеций на конечном интервале $[-A, A]$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G\left(x_j,\xi,T\right)\varphi(\xi)d\xi \approx \int_{-A}^{A} G\left(x_j,\xi,T\right)\varphi(\xi)d\xi \approx$$

$$\approx \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left[G\left(x_j,\xi_k,T\right)\varphi_k + G\left(x_j,\xi_{k+1},T\right)\varphi_{k+1}\right].$$

Тогда уравнение (7) примет следующий вид:

$$\chi_j = \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left[G\left(x_j,\xi_k,T\right)\varphi_k + G\left(x_j,\xi_{k+1},T\right)\varphi_{k+1}\right] + f_j, \quad j = \overline{0,N}. \qquad (8)$$

Система уравнений (8) является линейной относительно неизвестных значений $\left(\varphi_k\right)_{k=\overline{0,N}}$. В данной статье предлагается решать упомянутую систему при помощи непрерывного операторного метода.

Введем в рассмотрение вспомогательные функции $\overline{\varphi}_j(\sigma)$, $\sigma \geqslant 0$, такие, что $\lim\limits_{\sigma\to 0} \overline{\varphi}_j(\sigma) = \varphi_j$. В соответствии с описанием непрерывного операторного метода [15] функции $\overline{\varphi}_j(\sigma)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{\varphi}_0}{d\sigma} = \mu_0 \cdot \left(\dfrac{h}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}\left[G\left(x_0,\xi_k,T\right)\overline{\varphi}_k(\sigma) + G\left(x_0,\xi_{k+1},T\right)\overline{\varphi}_{k+1}(\sigma)\right] + f_0 - \psi_0\right), \\ \dfrac{d\overline{\varphi}_1}{d\sigma} = \mu_1 \cdot \left(\dfrac{h}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}\left[G\left(x_1,\xi_k,T\right)\overline{\varphi}_k(\sigma) + G\left(x_1,\xi_{k+1},T\right)\overline{\varphi}_{k+1}(\sigma)\right] + f_1 - \psi_1\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d\overline{\varphi}_N}{d\sigma} = \mu_N \cdot \left(\dfrac{h}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}\left[G\left(x_N,\xi_k,T\right)\overline{\varphi}_k(\sigma) + G\left(x_N,\xi_{k+1},T\right)\overline{\varphi}_{k+1}(\sigma)\right] + f_N - \psi_N\right), \end{cases} \qquad (9)$$

где μ_j $(j = \overline{0,N})$ принимает значение +1 либо −1 таким образом, чтобы обеспечить устойчивость решения системы (9).

Замечание 1. Как показано в статье [15], коэффициенты μ_j $(j = \overline{0,N})$ могут быть определены теоретически на основе вычисления логарифмической нормы матрицы системы уравнений (9). Тем не менее, по практическим соображениям, целесообразно представляется фиксировать значения коэффициентов μ_j экспериментальным путем.

Для обеспечения однозначности решения к системе (9) необходимо присоединить совокупность начальных условий

$$\bar{\varphi}_0(0)=\nu_0, \bar{\varphi}_1(0)=\nu_1, ..., \bar{\varphi}_N(0)=\nu_N, \tag{10}$$

где значения ν_0, ..., ν_N могут быть зафиксированы произвольным образом.

Задача (9)–(10) может быть решена любым приближенным методом решения дифференциальных уравнений. В частности, одним из наиболее простых и вместе с тем эффективных является метод Эйлера. Пусть θ – шаг метода Эйлера, а L – число итераций метода Эйлера. Тогда метод Эйлера приближенного решения задачи (9)–(10) определяется последовательными $\left(r=\overline{1,L}\right)$ вычислениями по следующей цепочке формул:

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_{0,r+1}=\bar{\varphi}_{0,r}+\mu_0\left(\dfrac{h}{2}\sum\limits_{k=0}^{N-1}\left[G(x_0,\xi_k,T)\bar{\varphi}_{k,r}+G(x_0,\xi_{k+1},T)\bar{\varphi}_{k+1,r}\right]+\right. \\ \qquad\qquad \left.+f_0-\psi_0\right), \\ \bar{\varphi}_{1,r+1}=\bar{\varphi}_{1,r}+\mu_1\left(\dfrac{h}{2}\sum\limits_{k=0}^{N-1}\left[G(x_1,\xi_k,T)\bar{\varphi}_{k,r}+G(x_1,\xi_{k+1},T)\bar{\varphi}_{k+1,r}\right]+\right. \\ \qquad\qquad \left.+f_1-\psi_1\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \bar{\varphi}_{N,r+1}=\bar{\varphi}_{N,r}+\mu_N\left(\dfrac{h}{2}\sum\limits_{k=0}^{N-1}\left[G(x_N,\xi_k,T)\bar{\varphi}_{k,r}+G(x_N,\xi_{k+1},T)\bar{\varphi}_{k+1,r}\right]+\right. \\ \qquad\qquad \left.+f_N-\psi_N\right), \end{cases} \tag{11}$$

где

$$\bar{\varphi}_{j,r}=\bar{\varphi}_j(\sigma_r),\ \ \sigma_r=r\theta,\ \bar{\varphi}_{j,0}=\nu_j.$$

Замечание 2. Константы μ_i выбраны по формуле (9).

Результат решения задачи фиксируется приближенными равенствами $\varphi_j\approx\bar{\varphi}_{j,L}$.

Модельный пример 1. Пусть требуется восстановить начальное условие задачи Коши (1)–(2), где $\gamma=1$, $\Phi(t,x)\equiv 0$, если дополнительно известной является функция $u(1,x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\exp\left[-\dfrac{x^2}{8}\right]$.

Замечание 3. Точное решение поставленной задачи определяется формулой $\varphi(x)=\exp\left[-\dfrac{x^2}{4}\right]$ при точном решении задачи (1)–(2)

$$u(t,x)=\frac{1}{\sqrt{t+1}}\exp\left[-\frac{x^2}{4(t+1)}\right].$$

При численных расчетах были зафиксированы следующие значения параметров метода: A = 5, N = 100, θ = 0,1.

Результат восстановления функции $\varphi(x)$ показан на рис. 1 и 2. График на рис. 1 соответствует случаю $L = 100$, в то время как график на рис. 2 соответствует случаю $L = 500$. На обоих графиках по оси абсцисс отложены значения независимого аргумента, в то время как по оси ординат отложены значения точного (сплошная линия) и приближенного (пунктирная линия) решения поставленной задачи – функции $\varphi(x)$.

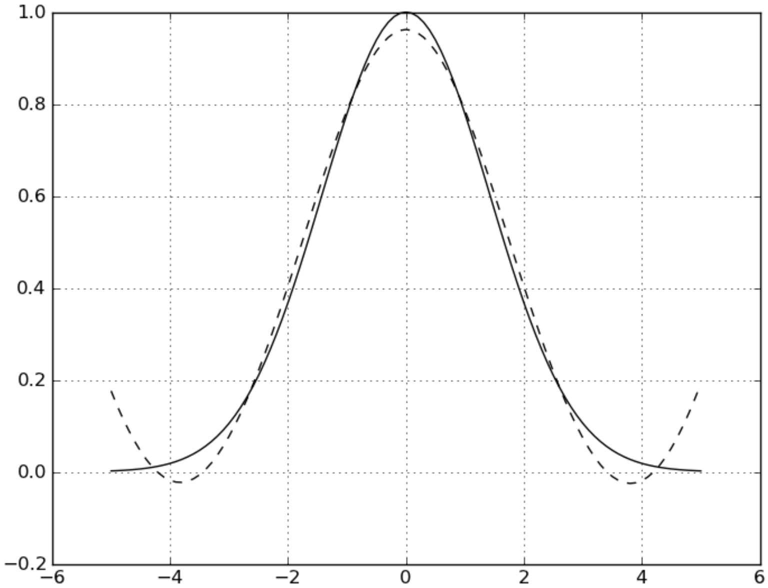

Рис. 1. Решение модельного примера 1 (L = 100)

Модельный пример 2. Решим задачу восстановления функции $\varphi(x)$ в задаче (1)–(2), если $\gamma = 2$:

$$\Phi(t,x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{-(t+x)^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{3}} \left(16t^2 x + 32tx^2 + 16x^3 - 4tx - 4x^2 - 16t - 23x + 4\right),$$

и дополнительно известной является функция

$$u(1,x) = xe^{-(1+x)^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{3}}.$$

Замечание 4. Точное решение поставленной задачи дается функциями

$$u(t,x) = xe^{-(t+x)^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{3}}, \ \varphi(x) = xe^{-x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{3}}.$$

При расчетах были зафиксированы следующие параметры метода:

$$A = 10, \quad N = 200, \quad M = 20, \quad L = 10^3, \quad \theta = 0{,}01.$$

Для вычисления интегралов f_j $(j = \overline{0,N})$ был использован многомерный аналог квадратурной формулы трапеций. Результат решения поставленной задачи проиллюстрирован на рис. 3.

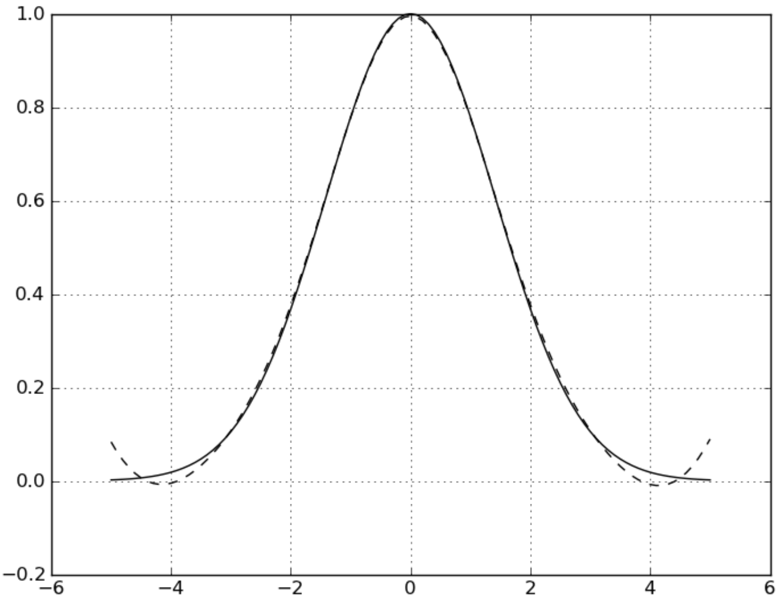

Рис. 2. Решение модельного примера 1 ($L = 500$)

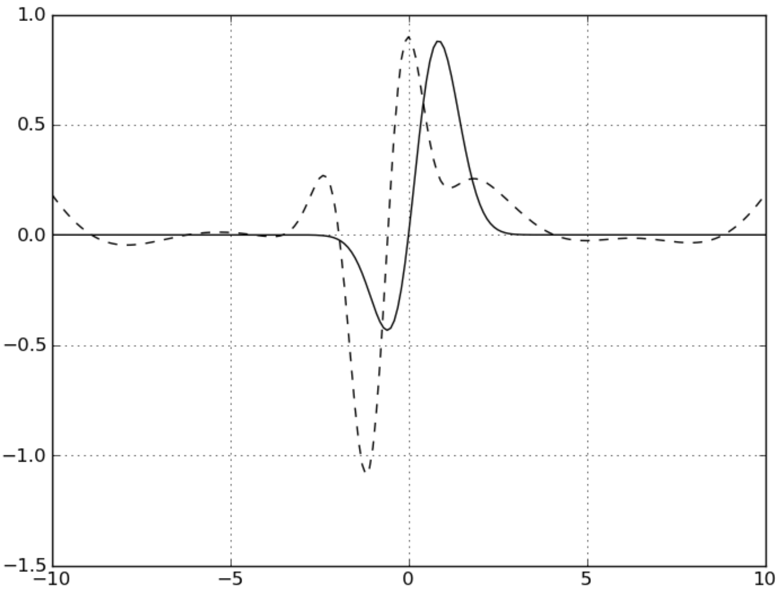

Рис. 3. Решение модельного примера 2

2. Восстановление начального условия для гиперболического уравнения

Перейдем к рассмотрению проблемы восстановления одного из граничных условий в задаче Коши (3)–(5) для одномерного линейного гиперболического уравнения.

Пусть сначала известной является функция $\psi(x)$; тогда поставим задачу об отыскании функции $\varphi(x)$ в предположении о том, что дополнительно известной является функция $u(T, x)$.

Известно [20], что общее решение задачи (3)-(5) дается интегральной формулой

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)\right]+$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}\Phi(s,\xi)d\xi ds. \quad (12)$$

Обозначим как $\chi(t)$ первообразную функции $\psi(\xi)$ так, что

$$\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi=\chi(x+at)-\chi(x-at).$$

Кроме того, определим $f(x)$ как функцию, аппроксимирующую (например, с помощью одной из известных кубатурных формул) в точке $\eta=x$ выражение

$$2u(T,\eta)-\frac{1}{a}\int\limits_{0}^{t^*}\int\limits_{\eta-a(T-s)}^{\eta+a(T-s)}\Phi(s,\xi)d\xi ds.$$

Обозначим как A достаточно большое вещественное положительное число. Введем на $x\in[-A,A]$ равномерную сетку из узлов $x_j=-A+jh$ с шагом $h=2A/N$, где N – достаточно большое положительное число. С целью упрощения предположим дополнительно, что существует такое целое положительное число M, что для T справедливо равенство $T=M\tau$, где $\tau=h/a$.

Пусть $t_i=i\tau$; тогда $T=t_M$. Легко видеть, что в этом случае значения $x_j\pm at_i$ будут совпадать с одним из узлов сетки; другими словами, для каждой упорядоченной пары (i,j) справедлива формула

$$x_j\pm at_i=x_{j\pm i}. \quad (13)$$

Введем в рассмотрение следующие обозначения:

$$u_j=u\left(T,x_j\right),\quad \varphi_j=\varphi\left(x_j\right),\quad \chi_j=\chi\left(x_j\right),\quad f_j=f\left(x_j\right).$$

Приняв в уравнении (12) $t=t_i$ и $x=x_j$, получим

$$u\left(t_i,x_j\right)=\frac{1}{2}\left[\varphi\left(x_j-at_i\right)+\varphi\left(x_j+at_i\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{x_j-at_i}^{x_j+at_i}\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t_i}\int\limits_{x_j-a(t_i-s)}^{x_j+a(t_i-s)}\Phi(s,\xi)d\xi ds, \quad (14)$$

С учетом соотношения (13) уравнение (14) может быть переписано в виде системы из следующих линейных алгебраических уравнений:

$$\varphi_{j-M} + \varphi_{j+M} + \chi_{j+M} - \chi_{j-M} = f_j, \tag{15}$$

где $j = \overline{0, N}$.

Система из уравнений (15) служит основой для построения численных методов решения задач, поставленных в разд. 1.

Рассмотрим сначала более простую задачу о восстановлении функции $\varphi(x)$ при известной функции $\psi(x)$. В этом случае значения $\chi_{j\pm M}$ при $\overline{0, N}$ можно считать известными, поскольку тогда они в общем случае могут быть вычислены приближенно по одной из квадратурных формул.

Обозначим $\overline{f}_j = f_j - \chi_{j+M} + \chi_{j-M}$. Тогда решение поставленной задачи сводится к решению системы из уравнений

$$\varphi_{j-M} + \varphi_{j+M} = \overline{f}_j, \quad j = \overline{0, N}. \tag{16}$$

Систему (16) предлагается решать в три этапа:

– на первом этапе будем последовательно при $j = -M, \ldots, N + M$ определять значения $\overline{\varphi}_j$ по расчетной формуле

$$\overline{\varphi}_j = \begin{cases} 0, \text{ если } -M \leqslant j < M, \\ \overline{f}_{j-M} - \varphi_{j-2M}, \text{ если } M \leqslant j \leqslant N + M; \end{cases}$$

– на втором этапе будем последовательно при $j = N + M, \ldots, -M$ определять значения $\overline{\overline{\varphi}}_j$ по формуле

$$\overline{\overline{\varphi}}_j = \begin{cases} 0, \text{ если } N - M < j \leqslant N + M, \\ \overline{f}_{j+M} - \varphi_{j+2M}, \text{ если } -M \leqslant j \leqslant N - M; \end{cases}$$

– на третьем этапе искомые значения φ_j определяются по формуле

$$\varphi_j = \frac{\overline{\varphi}_j + \overline{\overline{\varphi}}_j}{2}.$$

Модельный пример 3. Пусть требуется найти функцию $\varphi(x)$ в задаче (3)–(5), если известно, что $a = 1$,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{2x}{\left(x^2 + 1\right)^2} - 2xe^{-x^2}$$

и, кроме того, дополнительно известной является функция

$$u(1/2, x) = e^{-(x+1/2)^2} + \frac{1}{1 + (x - 1/2)^2}.$$

Замечание 5. Точное решение задачи дается функцией

$$\varphi(x) = e^{-x^2} + \frac{1}{1+x^2}$$

при точном решении задачи Коши (3)–(5), определяемом функцией

$$u(t,x) = e^{-(x+t)^2} + \frac{1}{1+(x-t)^2}.$$

Зафиксируем следующие параметры метода: $A = 5/2, \tau = h = 0{,}1$.

Значения интегралов $\chi_{j\pm M}$ вычислялись приближенно при помощи многомерного аналога составной квадратурной формулы трапеций с шагом $h = 0{,}1$. Результаты численного решения задачи приведены на рис. 4.

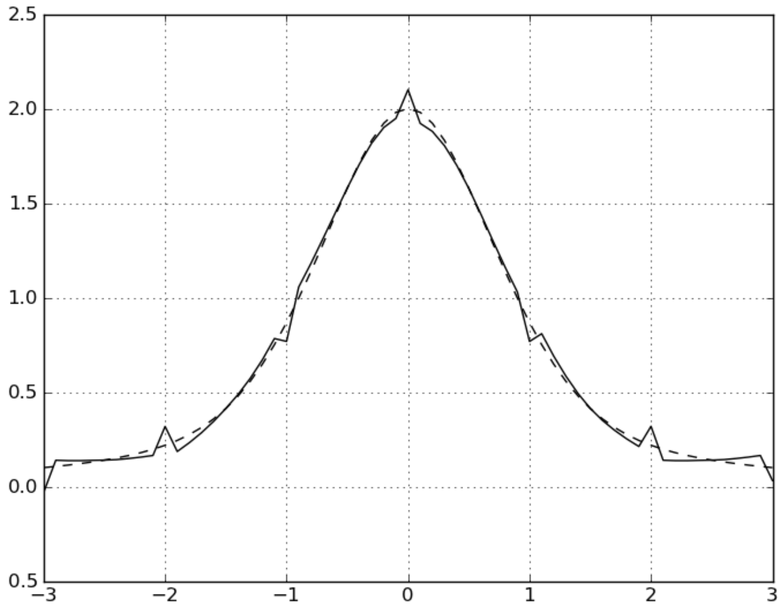

Рис. 4. Решение модельного примера 3

Теперь рассмотрим вторую задачу. Предположив, что в задаче Коши (3)–(5) известной является функция $\varphi(x)$, рассмотрим проблему восстановления функции $\psi(x)$ в дополнительном предположении о том, что известной является функция $u(T,x)$.

В данном случае известными слагаемыми в уравнении (15) считаем значения $\varphi_{j\pm M}$, $j = \overline{M, N-M}$. Тогда система (15) сводится к системе

$$\chi_{j+M} - \chi_{j-M} = \overline{\overline{f}}_j, \quad j = \overline{0, N}, \tag{17}$$

где $\overline{\overline{f}}_j = f_j - \varphi_{j-M} - \varphi_{j+M}$.

Систему уравнений (17) будем решать по аналогии с системой (16). Решение проведем в три этапа:

– на первом этапе последовательно при $j = -M, \ \dots \ , N + M$ вычисляются значения

$$\bar{\chi}_j = \begin{cases} 0, \text{ если } -M \leqslant j < M, \\ \bar{f}_{j-M} + \bar{\chi}_{j-2M}, \text{ если } M \leqslant j \leqslant N + M; \end{cases}$$

– на втором этапе последовательно при $j = N + M, \ \dots \ , \ -M$ вычисляются значения

$$\bar{\bar{\chi}}_j = \begin{cases} 0, \text{ если } N - M < j \leqslant N + M, \\ \bar{f}_{j+M} - \bar{\bar{\chi}}_{j+2M}, \text{ если } -M \leqslant j \leqslant N - M; \end{cases}$$

– на третьем этапе значения χ_j вычисляются по формуле

$$\chi_j = \frac{\bar{\chi}_j + \bar{\bar{\chi}}_j}{2}, \text{ при } j = -M, \ \dots \ , N - M.$$

Далее, для того чтобы на основании найденного набора значений χ_j восстановить функцию $\psi(x)$, необходимо решить относительно этой функции систему из интегральных уравнений:

$$\frac{1}{a} \int\limits_{x_j - aT}^{x_j + aT} \psi(\xi) d\xi = \chi_j, \ j = \overline{0, N}. \tag{18}$$

Эта система представляет собой записанное в каждой из точек $x = x_j$ интегральное уравнение

$$\frac{1}{a} \int\limits_{x - at^*}^{x + at^*} \psi(\xi) d\xi = \chi(x). \tag{19}$$

Для решения этого интегрального уравнения предлагается привлечь метод сплайн-коллокации, а также непрерывный операторный метод. Приравняем левые и правые части уравнения (19) в каждой точке $x = x_j$, а интеграл в уравнении (19) аппроксимируем при помощи составной квадратурной формулы трапеций по узлам x_j. Полученную в результате систему из линейных относительно неизвестных $\psi_j = \psi(x_j)$ уравнений

$$\frac{h}{2a} \sum_{k=j-M}^{j+M-1} \left[\psi_l + \psi_{l+1} \right] = \chi_j \tag{20}$$

предлагается решать при помощи непрерывного операторного метода.

Обозначим $\boldsymbol{\psi} = \left(\psi_{-M}, \ \dots \ , \psi_{N+M} \right)^T$, $\boldsymbol{\chi} = \left(\chi_{-M}, \ \dots \ , \chi_{N+M} \right)^T$, а через $\mathbf{A}$ обозначим матрицу системы (20). Тогда применение непрерывного операторного метода к решению системы (20) сводится к решению следующей задачи Коши для операторного дифференциального уравнения:

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{\psi}}}{d\sigma} = \mathbf{A}\bar{\boldsymbol{\psi}}(\sigma) - \boldsymbol{\chi}, \tag{21}$$

$$\bar{\boldsymbol{\psi}}(0) = \boldsymbol{\alpha}, \tag{22}$$

где вспомогательная вектор-функция $\bar{\boldsymbol{\psi}}(\sigma)$ ($\sigma \geqslant 0$) связана с искомой вектор-функцией $\bar{\boldsymbol{\psi}}$ предельным соотношением $\lim\limits_{\sigma\to\infty} \bar{\boldsymbol{\psi}}(\sigma) = \boldsymbol{\psi}$. Вектор $\boldsymbol{\alpha}$ размерности $N + 2M + 1$ в соответствии с описанием непрерывного операторного метода может быть зафиксирован произвольным образом; однако в целях ускорения сходимости итерационного процесса целесообразно представляется зафиксировать все компоненты вектора $\boldsymbol{\alpha}$ нулями.

Начальная задача (21)–(22) может быть решена любым численным методом решения дифференциальных уравнений. С практической точки зрения подходящим методом является метод Эйлера как сочетающий в себе простоту с высокой эффективностью решения поставленной задачи. Пусть θ – шаг метода Эйлера, а L – число итераций метода Эйлера. Тогда численное решение задачи (21)–(22) выполняется с помощью следующей вычислительной схемы:

$$\bar{\boldsymbol{\psi}}_{r+1} = \bar{\boldsymbol{\psi}}_r + \theta \cdot \left\{ \boldsymbol{\mu} \circ \left[\mathbf{A}\bar{\boldsymbol{\psi}}_r - \boldsymbol{\chi} \right] \right\}, \qquad r = \overline{0, L-1},$$

где $\bar{\boldsymbol{\psi}}_r = \bar{\boldsymbol{\psi}}(\sigma_r)$, $\sigma_r = r\theta$; через $\boldsymbol{\mu}$ обозначен вектор $\boldsymbol{\mu} = \left(\mu_{-M}, \ldots, \mu_{N+M}\right)^T$ с компонентами, равными +1 или –1, определяемыми таким образом, чтобы выписанная выше система была асимптотически устойчивой. Операция $\circ$ определяется как поэлементное произведение векторов одинаковой размерности.

Приближенное решение задачи фиксируется равенством $\boldsymbol{\psi} = \bar{\boldsymbol{\psi}}_L$.

Модельный пример 4. Проведем восстановление функции $\psi(x)$ в задаче Коши (3)–(5), если известно, что $\Phi(t, x) \equiv 0, \gamma = 1$:

$$\varphi(x) = e^{-x^2} + \frac{1}{1 + (x - t)^2}, \quad u(1, x) = e^{-(x+1)^2} + \frac{1}{1 + (x - 1)^2}.$$

Замечание 6. Точным решением задачи является функция

$$\psi(x) = \frac{2x}{\left(x^2 + 1\right)^2} - 2xe^{-x^2}$$

при точном решении задачи Коши (3)–(5), определяемом функцией

$$u(t, x) = e^{-(x+t)^2} + \frac{1}{1 + (x - t)^2}.$$

При численных расчетах были зафиксированы следующие параметры численного метода: $A = 10, \tau = h = 0{,}1, \theta = 0{,}1, L = 10^3$.

Результат численного решения поставленной задачи показан на рис. 5.

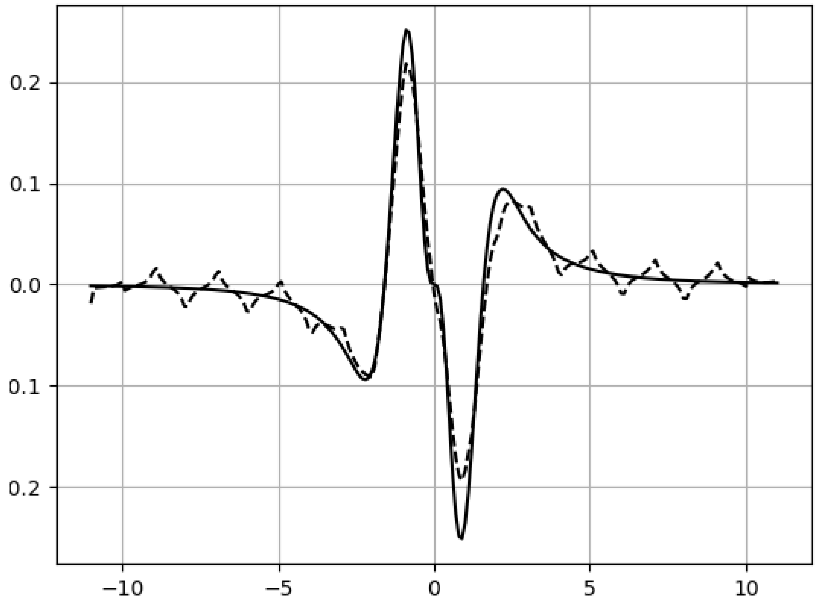

Рис. 5. Решение модельного примера 4

Заключение

В настоящей статье были рассмотрены проблемы численного восстановления начальных условий в задачах Коши для линейных уравнений параболического и гиперболического типов. В качестве дополнительной информации были использованы значения решений рассматриваемых задач Коши при фиксированном значении переменной t. При построении численных методов используется непрерывный операторный метод решения нелинейных уравнений в банаховых пространствах. Решение модельных примеров продемонстрировало высокую эффективность предложенных численных методов. Представляет значительный теоретический и практический интерес обобщение указанных численных методов на случай нелинейных уравнений, а также на случай многомерных задач.

Библиографический список

1. **Алифанов, О. М.** Обратные задачи теплообмена / О. М. Алифанов. – Москва : Машиностроение, 1988. – 280 с.
2. **Алифанов, О. М.** Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена / О. М. Алифанов, Е. А. Артюхин, Е. А. Румянцев. – Москва : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 288 с.
3. **Бек, Дж.** Некорректные обратные задачи теплопроводности / Дж. Бек, D. D. P. Б. Блакуэлл, Ч. Сент-Клер мл. – Москва : Мир, 1989. – 312 с.
4. **Латтес, Р.** Метод квазиобращения и его приложения / Р. Латтес, Ж. Л. Лионс. – Москва : Мир, 1970. – 336 с.
5. Moment Theory and Some Inverse Problems in Potential Theory and Heat Conduction / D. D. Ang, R. Gorenflo, V. K. Le , D. D. Trong. – Springer, 2002. – 183 p.
6. **Özisik, M. N.** Inverse Heat Transfer. Fundamentals and applications / M. N. Özisik , H. R. B. Orlande. – New York : Taylor & Francis, 2000. – 330 p.
7. **Кабанихин, С. И.** Обратные и некорректные задачи / С. И. Кабанихин. – Новосибирск : Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.

8. **Hasanov Hasanoğlu, A.** Introduction to Inverse Problems for Differential Equations / Hasanoğlu A. Hasanov, V. G. Romanov. – Springer International Publishing AG, 2017. – 261 p.
9. **Самарский, А. А.** Вычислительная теплопередача / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – Москва : Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
10. **Самарский, А. А.** Итерационное решение ретроспективной задачи теплопроводности / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, В. Н. Васильев // Математическое моделирование. – 1997. – Т. 9, № 5. – С. 119–127.
11. **Самарский, А. А.** Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – Москва : ЛКИ, 2009. – 480 с.
12. **Кабанихин, С. Н.** Численный метод решения задачи Дирихле для волнового уравнения / С. Н. Кабанихин, О. И. Криворотько // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2012. – Т. 15, № 4. – С. 90–101.
13. Optimization Method in Dirichlet Problem for Wave Equation / S. I. Kabanikhin, M. A. Bektemesov , D. B. Nurseitov, O. I. Krivorotko, A. N. Alimova // J. Inverse Ill-Posed Probl. – 2012. – Vol. 20, № 2. – P. 193–211.
14. **Васильев, В. И.** Итерационный метод решения задачи Дирихле и ее модификаций / В. И. Васильев, А. М. Кардашевский, В. В. Попов // Математические заметки СВФУ. – 2017. – Т. 24, № 3. – С. 38–51.
15. **Бойков, И. В.** Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений / И. В. Бойков // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48, № 9. – С. 1308–1314.
16. **Бойков, И. В.** Об одном приближенном методе определения коэффициента теплопроводности / И. В. Бойков, В. А. Рязанцев // Журнал Средневолжского математического общества. – 2019. – Т. 21, № 2. – С. 149–163. – DOI 10.15507/2079-6900.21.201902.149-163.
17. **Бойков, И. В.** О численном решении коэффициентной обратной задачи для гиперболических уравнений / И. В. Бойков, В. А. Рязанцев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2019. – № 3. – С. 47–62. – DOI 10.21685/2072-3040-2019-3-4.
18. **Бойков, И. В.** О применении непрерывного операторного метода к решению прямой задачи для нелинейных параболических уравнений / И. В. Бойков, В. А. Рязанцев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 1. – С. 97–112. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-1-8.
19. **Boykov, I. V.** On an iterative method for solution of direct problem for nonlinear hyperbolic differential equations / I. V. Boykov, V. A. Ryazantsev // Журнал Средневолжского математического общества. – 2020. – Т. 22, № 2. – С. 155–163. – DOI 10.15507/2079-6900.22.202002.
20. **Полянин, А. Д.** Справочник по линейным уравнениям математической физики / А. Д. Полянин. – Москва : Физматлит, 2001. – 576 с.

References

1. Alifanov O. M. *Obratnye zadachi teploobmena* [Inverse problems of heat transfer]. Moscow: Mashinostroenie, 1988, 280 p. [In Russian]
2. Alifanov O. M., Artyukhin E. A., Rumyantsev E. A. *Ekstremal'nye metody resheniya nekorrektnykh zadach i ikh prilozheniya k obratnym zadacham teploobmena* [Extreme methods for solving ill-posed problems and their application to inverse problems of heat transfer]. Moscow: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1988, 288 p. [In Russian]
3. Bek Dzh., Blakuell D. D. R. B., Sent-Kler Ch. ml *Nekorrektnye obratnye zadachi teploprovodnosti* [Ill-posed inverse peat conduction зroblems]. Moscow: Mir, 1989, 312 p. [In Russian]

4. Lattes R., Lions Zh. L. *Metod kvaziobrashcheniya i ego prilozheniya* [Quasi-inversion method and its applications]. Moscow: Mir, 1970, 336 p. [In Russian]
5. Ang D. D., Gorenflo R., Le V. K., Trong D. D. *Moment Theory and Some Inverse Problems in Potential Theory and Heat Conduction*. Springer, 2002, 183 p.
6. Özisik M. N., Orlande H. R. B. *Inverse Heat Transfer. Fundamentals and applications*. New York: Taylor & Francis, 2000, 330 p.
7. Kabanikhin S. I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* [Inverse and ill-posed problems]. Novosibirsk: Sibirskoe nauchnoe izdatel'stvo, 2009, 457 p. [In Russian]
8. Hasanov Hasanoğlu A., Romanov V. G. *Introduction to Inverse Problems for Differential Equations*. Springer International Publishing AG, 2017, 261 p.
9. Samarskiy A. A., Vabishchevich P. H. *Vychislitel'naya teploperedacha* [Computational heat transfer]. Moscow: Editorial URSS, 2003, 784 p. [In Russian]
10. Samarskiy A. A., Vabishchevich P. N., Vasil'ev V. N. *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical modeling]. 1997, vol. 9, no. 5, pp. 119–127. [In Russian]
11. Samarskiy A. A., Vabishchevich P. N. *Chislennye metody resheniya obratnykh zadach matematicheskoy fiziki* [Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics]. Moscow: LKI, 2009, 480 p. [In Russian]
12. Kabanikhin S. N., Krivorot'ko O. I. *Sibirskiy zhurnal vychislitel'noy matematiki* [Siberian journal of computational mathematics]. 2012, vol. 15, no. 4, pp. 90–101. [In Russian]
13. Kabanikhin S. I., Bektemesov M. A., Nurseitov D. B., Krivorotko O. I., Alimova A. N. *J. Inverse Ill-Posed Probl*. 2012, vol. 20, no. 2, pp. 193–211.
14. Vasil'ev V. I., Kardashevskiy A. M., Popov V. V. *Matematicheskie zametki SVFU* [Mathematical notes of NEFU]. 2017, vol. 24, no. 3, pp. 38–51. [In Russian]
15. Boykov I. V. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations]. 2012, vol. 48, no. 9, pp. 1308–1314. [In Russian]
16. Boykov I. V., Ryazantsev V. A. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva* [Journal of the Middle Volga Mathematical Society]. 2019, vol. 21, no. 2, pp. 149–163. DOI 10.15507/2079-6900.21.201902.149-163. [In Russian]
17. Boykov I. V., Ryazantsev V. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2019, no. 3, pp. 47–62. DOI 10.21685/2072-3040-2019-3-4. [In Russian]
18. Boykov I. V., Ryazantsev V. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fi-ziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2020, no. 1, pp. 97–112. DOI 10.21685/2072-3040-2020-1-8. [In Russian]
19. Boykov I. V., Ryazantsev V. A. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva* [Journal of the Middle Volga Mathematical Society]. 2020, vol. 22, no. 2, pp. 155–163. DOI 10.15507/2079-6900.22.202002. [In Russian]
20. Polyanin A. D. *Spravochnik po lineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki* [Handbook of linear equations in mathematical physics]. Moscow: Fizmatlit, 2001, 576 p. [In Russian]

Бойков Илья Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

Boykov Il'ya Vladimirovich
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the sub-department of higher and applied mathematics, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

E-mail: boikov@pnzgu.ru

Рязанцев Владимир Андреевич
кандидат технических наук, доцент, кафедра высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

Ryazantsev Vladimir Andreevich
Candidate of engineering sciences, associate professor, sub-department of higher and applied mathematics, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

E-mail: math@pnzgu.ru

Образец цитирования:

Бойков, И. В. Численное восстановление начального условия в задачах Коши для линейных параболических и гиперболических уравнений / И. В. Бойков, В. А. Рязанцев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 3 (55). – С. 68–84. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-3-6.